Análisis Matemático
Evaluación de continuidad y derivadas – Soluciones

1. Justifica que la ecuación $\operatorname{sen} x + x^2 = \cos x$ tiene exactamente dos soluciones reales.

   Solución. Definamos $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por $f(x) = \operatorname{sen} x + x^2 - \cos x$. Dicha función es indefinidamente derivable en $\mathbb{R}$. Por supuesto, es continua y está definida en un intervalo. Tenemos que $f(-\pi) = f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0$ y $f(0) = -1 < 0$. Por el teorema de Bolzano deducimos que hay puntos $c_1 \in]-\pi, 0[$ y $c_2 \in]0, \pi[$ en los que la función f se anula: $f(c_1) = f(c_2) = 0$. Veamos que dichos puntos son los únicos puntos donde la función se anula.

   Tenemos que $f'(x) = \cos x + 2x + \operatorname{sen} x$ y $f''(x) = -\operatorname{sen} x + 2 + \cos x$. Como $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$ y $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, es claro que $f''(x) \geqslant 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, de hecho se tiene que $f''(x) > 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, porque $f''(x) = 0$ solamente puede ocurrir si $\operatorname{sen} x = 1$ y $\cos x = -1$, lo cual es imposible porque $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$. Como $f''(x) > 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, deducimos que f' es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, por tanto f' puede anularse, como mucho una sola vez (de hecho se anula una sola vez, pero eso no interesa) y, por el teorema de Rolle, concluimos que f solamente puede anularse como mucho en dos puntos. Queda así probado que la ecuación $\operatorname{sen} x + x^2 = \cos x$ tiene exactamente dos soluciones reales. ☺

   Comentario. El ejercicio resuelto número 127 en la página 290 de mi libro de Cálculo Diferencial es casi idéntico a este. Hemos hecho en clase varios ejercicios muy parecidos y en la relación de derivadas había un ejercicio del mismo tipo cuya solución detallada puse en el SWAD.

2. Dado $\alpha \in]0,1[$ demuestra que $x^\alpha \leqslant \alpha x + 1 - \alpha$ para todo $x > 0$. ¿Cuándo se da la igualdad?.

   Solución. Es el ejercicio resuelto número 133 en la página 293 de mi libro de Cálculo Diferencial. Este ejercicio lo hicimos en clase.

   Comentario. ¿Para qué sirve tener una excelente colección de ejercicios resueltos? ¿Para qué sirve hacer ejercicios en clase?

3. Calcula los límites siguientes.

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{2\log\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) - x}{x} \qquad\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{2-2\cos x}{x^2}\right)^{1/(1-\cos x)}$$

   Solución. *a*) Como $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$ (es un límite de los que debes saber de memoria: muy fácil de recordar porque es la derivada en 0 de la función exponencial), el límite pedido es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicaremos la Inevitable Regla del Marqués de L'Hôpital. Derivando numerador y denominador obtenemos la función:

$$2\frac{x}{e^x-1}\frac{x e^x - e^x + 1}{x^2} - 1 = 2\frac{x}{e^x-1}\left(\frac{x e^x - e^x + 1}{x^2} - \frac{e^x - 1}{2x}\right) =$$
$$= 2\frac{x}{e^x-1}\frac{x^2 e^x - 2x e^x + 2x + x^2}{2x^3} \sim \frac{x e^x - 2e^x + 2 + x}{x^2}$$

   Donde he usado que para $x\to 0$ es $e^x - 1 \sim x$ y también – ¡prodigiosa idea! – he *simplificado* por x numerador y denominador. Ahora tenemos que calcular un sencillo límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x e^x - 2e^x + 2 + x}{x^2} = (\text{¡la Regla!}) = \lim_{x\to 0}\frac{x e^x - e^x + 1}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(e^x - \frac{e^x-1}{x}\right) = \frac{1}{2}(1-1) = 0.$$

   b) Como $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = 1/2$ (esto no precisa justificación, es uno de los límites que debes conocer), el límite pedido es una indeterminación del tipo 1^∞. Usaremos el criterio de equivalencia logarítmica. Tenemos que:

$$\frac{1}{1-\cos x}\left(\frac{2-2\cos x}{x^2}-1\right)=\frac{1}{1-\cos x}\,\frac{2-x^2-2\cos x}{x^2}=\frac{x^2}{1-\cos x}\,\frac{2-x^2-2\cos x}{x^4}\sim$$
$$\sim 2\frac{2-x^2-2\cos x}{x^4}$$

Para calcular este límite, como es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, derivamos numerador y denominador:

$$\lim_{x\to 0} 2\frac{2-x^2-2\cos x}{x^4}=(\text{¡la Regla!})=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}=-\frac{1}{6}$$

El último límite no requiere justificación, es uno de esos límites (¡otro más!) que debes saber de memoria. Claro está, si no te lo sabes, lo calculas. El límite pedido es igual a $\mathrm{e}^{-1/6}$. ☺

Comentarios. En la relación segunda de derivadas había límites parecidos (algo más complicados) cuyas soluciones puse en el SWAD con comentarios y explicaciones detalladas. De poco ha servido. Vuestra principal dificultad no es derivar ni, mucho menos, aplicar la regla de L'Hôpital (porque eso es *matemagia* que a todos os gusta), no, la dificultad mayor es sumar, restar, multiplicar y dividir sin cometer errores. Las cuatro operaciones básicas de la aritmética se aprenden (o …¿se aprendían?) en la escuela. Los profesores de Universidad no sabemos enseñar esas cosas.

4. Calcula un punto (a,b) con $a>0$ de la parábola $y=3-x^2$ de forma que el segmento determinado por la tangente a la parábola en dicho punto y los ejes coordenados tenga longitud mínima.

Solución. Pongamos $f(x)=3-x^2$. La tangente a la parábola en un punto $(a,f(a))$ es la recta de ecuación cartesiana $y-f(a)=f'(a)(x-a)$, es decir, $y-3+a^2=-2a(x-a)$. Los puntos de corte de dicha recta con los ejes son $A=(0,3+a^2)$ y $B=(\frac{3+a^2}{2a},0)$. La longitud del segmento $\overline{AB}$ es $\sqrt{(3+a^2)^2+\dfrac{(3+a^2)^2}{4a^2}}$. Consideremos la función $h:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ dada por:

$$h(a)=(3+a^2)^2+\frac{(3+a^2)^2}{4a^2}=(3+a^2)^2\left(1+\frac{1}{4a^2}\right)\qquad (a>0)$$

Se trata de calcular el mínimo absoluto de dicha función en $\mathbb{R}^+$. Calculamos los puntos críticos:

$$h'(a)=(3+a^2)4a\left(1+\frac{1}{4a^2}\right)-(3+a^2)^2\frac{1}{2a^3}=(3+a^2)\frac{8a^4+a^2-3}{2a^3}$$

Pongamos $P(a)=8a^4+a^2-3$. Los puntos críticos de h son las soluciones positivas de la ecuación $P(a)=0$. Haciendo $a^2=u$, debemos resolver la ecuación $8u^2+u-3=0$, cuya única solución positiva es $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{97}}{16}$. Por tanto, la ecuación $P(a)=0$ tiene una única solución positiva que es $a_0=\sqrt{\alpha}$. Como $P(0)=-3$ y la función P es continua y no se anula en $[0,a_0[$, deducimos que $P(a)<0$ para todo $a\in[0,a_0[$. Análogamente, como $P(1)=6>0$ y P no se anula en $]a_0,+\infty[$, deducimos que $P(a)>0$ para todo $a\in]a_0,+\infty[$. En consecuencia, la función h es decreciente en $]0,a_0]$ y es creciente en $[a_0,+\infty[$, lo que implica que $h(a)\geqslant h(a_0)$ para todo $a>0$. La longitud mínima del segmento $\overline{AB}$ se alcanza para el valor $a=a_0$ y viene dada por:

$$(3+\alpha)\sqrt{1+\frac{1}{4\alpha}}$$

☺

Comentarios. Hemos hecho este mismo ejercicio para el caso de una elipse y la solución detallada la puse en el SWAD. Los cálculos para la parábola son bastante más simples que para la elipse.